Πέμπτο τεστ Απειροστικός Λογισμός 2

Διάρκεια 90 Λεπτά

Στοιχειοθεσία: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc)

Θέμα 1

Αν $I_n = \int \ln^n x \; dx, \; n \in \mathbb{N}$, να αποδείξετε ότι $I_n = x \ln^n x - nI_{n-1}, \; n \geq 2$ και μετά να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $J = \int \ln^3 x \; dx$.

Θέμα 2

(i) Να χαρακτηρίσετε ως αληθή ή ψευδή τον παρακάτω ισχυρισμό με πλήρη αιτιολόγηση.

Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f\colon [2,3] \to \mathbb{R}$, με $f([2,3]) = [0, 2021]$, ισχύει $\int_2^3 f(x) \; dx > 0$.

(ii) Έστω συνεχής συνάρτηση $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\int_0^1 f^2(x) \; dx = 8 \int_0^1 f(x) \; dx - 16$. Να δώσετε αναλυτικά τον τύπο της f.

(iii) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $a, b \in [0,1]$ ώστε

$$\int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x^2+1} \; dx = \frac{2}{\pi(a^2+1)} = \frac{\pi}{4} \sin(\pi b),$$

και έπειτα ότι

$$\frac{1}{\pi} \leq \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x^2+1} \; dx \leq \frac{2}{\pi}.$$

Θέμα 3

Έστω $a \in \mathbb{R}$ και μία συνεχής συνάρτηση $f\colon [-a, a] \to \mathbb{R}$.

(i) Να αποδείξετε ότι $\int_{-a}^0 f(-x) \; dx = \int_0^a f(x) \; dx$.

(ii) Αν f άρτια, να αποδείξετε ότι $\int_{-a}^a f(x) \; dx = 2 \int_0^a f(x) \; dx$.

(iii) Αν f περιττή, να αποδείξετε ότι $\int_{-a}^a f(x) \; dx = 0$ και η $F(x) = \int_0^x f(t) \; dt$ είναι άρτια.

(iv) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{-100}^{100} \frac{x^{2021} - x^3}{2 + \cos x}.$$

Θέμα 4

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\int_0^{\pi/6} \frac{1}{\cos x} \; dx, \quad \int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x} \; dx, \quad \int \sqrt{12 - 4x - x^2} \; dx, \quad \int \sin(\ln x) \; dx.$$

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ!!